EX 37 :

$U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$

1) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$

d'où (U_n) est croissante

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$

a) $k \geq 1$, $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow k^3 \leq x^3 \leq (k+1)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

f est dérivable sur $[k,k+1]$ et $\frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$\frac{-2}{k^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

$\Rightarrow \frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{2}{k^3}$

b) pour $1 \leq k \leq n$

* $f(k)-f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} [f(k)-f(k+1)] \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$

$\Rightarrow f(1) - f(n) \leq 2\left[U_n - \frac{1}{n^3}\right]$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 2U_n - \frac{2}{n^3} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (1)

* $\frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3} \leq f(1) - f(n) \Rightarrow 2[U_n - 1] \leq 1 - \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow U_n - 1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \Rightarrow U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $U_n \leq \frac{3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

d) (U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{3}{2}$

d'où $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$

EX 38 :

$f(x) = tgx$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

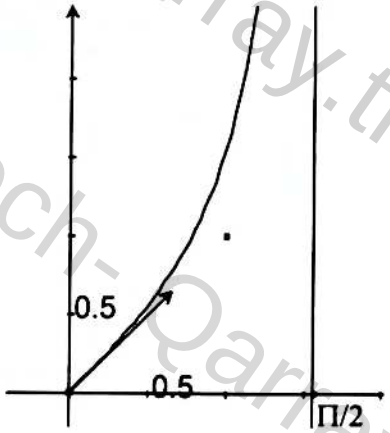
1) a) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) = 1 + tg^2 x > 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} tgx = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$

$f'_d(0) = 1$: le coefficient directeur de la tangente à (ζ_f) au point d'abcisse 0



Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn